**INVESTIGACIÓN OPERATIVA: Modelos Determinísticos.**

Desde el advenimiento de la revolución industrial, el mundo ha sido testigo de un crecimiento sin precedentes en el tamaño y la complejidad de las organizaciones. Una parte integral de ese cambio revolucionario fue el gran aumento en la división del trabajo y en la separación de las responsabilidades administrativas en estas organizaciones. Los resultados han sido espectaculares. Sin embargo, junto con los beneficios, el aumento en el grado de especialización creó nuevos problemas que ocurren hasta la fecha en muchas empresas.

Uno de los problemas es que, conforme la complejidad y la especialización crecen, se vuelve más difícil asignar los recursos disponibles a las diferentes actividades de la manera más eficaz para la organización como un todo. Este tipo de problemas y la necesidad de encontrar la mejor forma de resolverlos, proporcionaron el ambiente adecuado para el surgimiento de la INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

Se pueden identificar por lo menos dos factores que tuvieron gran importancia en el desarrollo de la I.O. al inicio de la década de 1950. Uno es el gran progreso que ya se había hecho en el mejoramiento de las técnicas disponibles. Un ejemplo sobresaliente es el Método Simplex para resolver problemas de Programación Lineal, desarrollado en 1947 por George Dantzig.

Un segundo factor que dio un gran ímpetu al desarrollo de este campo fue la revolución de las computadoras. El manejo efectivo de los complejos problemas inherentes a la I.O. casi siempre requiere un gran número de cálculos, realizarlos a mano puede resultar casi imposible. Por lo tanto, el desarrollo de la computadora fue una gran ayuda para la investigación de operaciones.

La investigación de operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones (o actividades) dentro de una organización. La I.O. se ha aplicado de manera extensa en áreas tan diversas como manufactura, transporte, construcción, telecomunicaciones, planeación financiera, cuidado de la salud, milicia y servicios públicos, entre otros.

En gran medida, en la I.O. se utiliza el método científico para investigar el problema en cuestión. En particular, el proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema incluyendo la recolección de los datos pertinentes. El siguiente paso es la construcción de un método científico (por lo general matemático) que intenta abstraer la esencia del problema real. En este punto se propone la hipótesis de que el modelo es una representación suficientemente precisa de las características esenciales de la situación para que las conclusiones (soluciones) que intenta abstraer sean válidas también para el problema real. Después, se llevan a cabo los experimentos adecuados para probar esta hipótesis, modificarla si es necesario y eventualmente verificarla (este paso se conoce como validación del modelo).

La I.O. se ocupa también de la administración práctica de la organización. Así, deberá también proveer conclusiones claras que pueda usar el tomador de decisiones cuando las necesite. Provee un amplio punto de vista organizacional.

Otra característica adicional es que la investigación de operaciones intenta encontrar una mejor solución (llamada óptima) para el problema bajo consideración (decimos una mejor solución, no la mejor solución porque pueden existir muchas soluciones que empaten como la mejor). En lugar de contentarse con mejorar el estado de las cosas, la meta es identificar el mejor curso de acción posible. Esta “búsqueda de la optimalidad” es un aspecto importante dentro de la investigación de operaciones.

**PROGRAMACIÓN LINEAL (P.L.)**

La programación lineal estudia el problema de minimizar o maximizar una función lineal en presencia de restricciones lineales de igualdad y/o desigualdad. Desde que George Dantzig desarrolló el método simplex, la programación lineal se ha utilizado ampliamente en las áreas militar, industrial, gubernamental y de planificación urbana, entre otras. La aceptación que ha tenido puede atribuirse a muchos factores, entre los cuales están su capacidad para modelar problemas grandes y complejos y la habilidad de los usuarios para resolver problemas a gran escala en un lapso razonable mediante el uso de algoritmos efectivos y computadoras modernas.

Dentro del modelado de la Programación Lineal, podemos identificar 4 pasos importantes:

1. Planteamiento del Problema: implica un estudio detallado del sistema, la recolección de datos y la identificación del problema específico que es necesario analizar, junto con las restricciones y la función objetivo (función lineal que se quiere maximizar o minimizar según el tipo de problema)
2. Modelo matemático: se utiliza para obtener una abstracción o idealización del problema. El modelo debe representar de manera satisfactoria al sistema bajo análisis y que, además, sea tratable matemáticamente. Debe tenerse en cuenta que a partir de este modelo, las soluciones obtenidas serán soluciones del modelo y no necesariamente del problema real.
3. Deducir una solución: es necesario elegir o diseñar una técnica apropiada que aproveche cualquier estructura.
4. Implementación: el modelo se pone en marcha para auxiliar interactivamente en el proceso de la toma de decisiones.

Desde que surgiera el método simplex, mucha gente ha contribuido al crecimiento de la Programación Lineal, ya sea al desarrollar la teoría matemática, diseñar códigos y métodos computacionales eficientes, experimentar con nuevos algoritmos y aplicaciones, y aplicar la Programación Lineal como herramienta auxiliar para resolver problemas más complejos.

El algoritmo simplex proporciona bastante información sobre la teoría de la P.L. y produce un algoritmo eficiente en la práctica.**MÉTODO SIMPLEX**

El Método Simplex de resolución debido a George Dantzig, provee un sistema rápido y efectivo para la resolución de los problemas de Programación Lineal. Es la metodología empleada en las aplicaciones prácticas, y permite resolver una gran cantidad de problemas.

Su desarrollo parecerá complicado al principio, pero planteado el cuadro inicial correspondiente, el sistema se torna completamente mecánico, lo cual hace que su resolución sea perfectamente factible por medio de computadoras.

El Sistema, al igual que el método algebraico, llega a la solución óptima por medio de iteraciones o pasos sucesivos, ya que no existe en ningún método o fórmula que alcance directamente esta solución.

**Puntos extremos y Optimalidad**

Cuando existe una solución óptima del problema de P.L., entonces también existe un punto extremo óptimo (este concepto geométrico sólo es visible en problemas con dos variables). Básicamente lo que hace el método simplex es trasladar la definición geométrica del punto extremo a una definición algebraica.

¿Cómo identifica el método simplex los puntos extremos en forma algebraica?

Como paso inicial, el método simplex necesita que cada una de las restricciones esté en una **forma estándar**. Las propiedades de la forma estándar son:

1. Todas las restricciones son ecuaciones, para ello agregamos variables de holgura y/o artificiales según sea necesario. Los segundos miembros de las ecuaciones (términos independientes) deben ser no negativos.
2. Todas las variables son no negativas (esta propiedad es crucial en el desarrollo del método simplex)
3. La función objetivo puede ser de maximización o de minimización.

Los puntos extremos del espacio de soluciones pueden identificarse algebraicamente por medio de las soluciones básicas del sistema de ecuaciones simultáneas. Lo que hace el método simplex, es identificar una solución inicial y luego moverse sistemáticamente a otras soluciones básicas que tengan el potencial de mejorar el valor de la función objetivo. El proceso termina cuando se identifica una solución básica como óptima.

En la forma estándar, el modelo tiene ***m*** ecuaciones y ***n*** incógnitas. Para encontrar una solución básica necesitamos hacer ***n-m*** variables iguales a cero. A estas variables las llamamos **no básicas**. Las **m** variables restantes son **variables básicas**. Una solución básica es **factible** si todos los valores de su solución son no negativos (**Xk ≥ 0**). Si pasa lo contrario (Xk < 0), entonces la solución básica es **no factible**.

El método simplex parte de una solución básica factible (punto extremo), continúa iterando a través de soluciones básicas factibles sucesivas hasta alcanzar el óptimo.

Si la solución básica del paso inicial no es la óptima, debemos buscar una nueva solución básica factible (*variable entrante*). Para lograr esto, debemos hace básica una de las variables actuales no básicas. Pero como siempre debo tener n-m variables no básicas, también debemos seleccionar una variable básica actual y transformarla en no básica (*variable saliente*).

Los procedimientos para seleccionar correctamente la variable que sale y la variable que entra, se presentan a continuación:

**Condición de Optimalidad:** La variable entrante en una maximización (minimización) es la variable no básica con el coeficiente más negativo (más positivo) en el renglón Zj - Cj. Un empate puede romperse arbitrariamente. El óptimo se alcanza cuando todos os coeficientes no básicos en el renglón Zj - Cj son no negativos (no positivos).

**Condición de Factibilidad:** Tanto en problemas de maximización como de minimización, la variable saliente es la variable básica actual, con el menor valor positivo de θ. Un empate se rompe arbitrariamente.

**Casos especiales en la aplicación del Método Simplex:**

1. Degeneración
2. Opciones óptimas
3. Soluciones no factibles

**1. Degeneración:** En la aplicación de la condición de factibilidad, indicamos que una coincidencia de la razón mínima se de romper de forma arbitraria. Sin embargo, cuando suceda esto, una o más variables básicas, será necesariamente igual a cero en la siguiente iteración. En este caso decimos que la nueva solución es degenerada. Desde el punto de vista práctico, la condición revela que el modelo tiene cuando menos una restricción redundante (es decir, que no es necesaria para la determinación del punto óptimo). Desafortunadamente, no existen técnicas confiables para identificar restricciones redundantes directamente de la tabla.

Desde el punto de vista teórico, la degeneración tiene dos implicaciones. La primera tiene que ver con el fenómeno del ciclaje o reciclaje. Por lo tanto, es posible, que el método simplex repetirá la misma sucesión de iteraciones, sin mejorar nunca el valor de la función objetivo ni poner fin a los cálculos. El segundo punto de vista teórico, es que, en algunos casos, pese a diferir en la clasificación de las variables como básicas y no básicas, producen valores idénticos de todas las variables y el valor de la función objetivo.

**2. Opciones óptimas (soluciones alternativas):** Cuando la función objetivo es paralela a una restricción, la función objetivo tomará el mismo valor óptimo en más de un punto de solución. Gráficamente, la solución óptima es un segmento de recta, cualquier punto del mismo representa el mismo valor en la función objetivo.

¿Cómo sabemos por la tabla que existen soluciones alternativas? En el renglón Zj - Cj hay variables no básicas que tienen coeficiente 0 (cero). Esto indica que la variable puede ingresar en la solución básica sin alterar el valor de Z, pero provoca cambio en los valores de las variables. El método simplex sólo determina los puntos extremos del segmento óptimo.

**3. Solución NO factible:** Esto ocurre si las restricciones no se pueden satisfacer en forma simultánea. Es decir, cuando no tenemos región factible, tampoco tenemos solución factible. Esto ocurre cuando recurrimos al uso de variables artificiales que, por su mismo diseño, no ofrecen una solución factible al modelo original. Aunque se toman medidas (penalizando las variables colocándoles el coeficiente M) para que las variables artificiales sean cero en el nivel óptimo, si el modelo no tiene un espacio factible, al menos una variable artificial será positiva en la iteración óptima. Esta es nuestra indicación de que el problema no tiene solución factible.

**Matriz de Coeficientes**

Si se analiza detenidamente la matriz de coeficientes, se advierte que está compuesta en realidad por 2 submatrices.

La primera es de orden 2 x 4 y está formada por los vectores columna de las variables reales (vectores A1 y A2) La segunda, de orden 4 x 4, está constituida por los vectores unitarios correspondientes a las variables de holgura (A3, A4, A5 y A6)

El resto de los vectores puede entonces expresarse como combinación de los vectores de la base. Ésta última submatriz es en realidad una *matriz unitaria*, que es el equivalente matricial de la unidad, y cuyos unos forman una diagonal de la misma.

La matriz unitaria representa la *base* del sistema e individualiza las variables *no nulas* (es decir, aquellas que están en la base)

En la matriz de coeficientes que armamos, para luego comenzar a realizar las operaciones que nos permitan desarrollar el Simplex debemos tener en cuenta:

- La matriz unitaria representa en cada solución o iteración, la base del sistema; es decir, el sistema de coordenadas o ejes de referencia de los vectores que son combinación lineal de los vectores de dicha base. Éstos son la solución del problema.

- Cuando una variable entra en la solución o en la base, su vector es un vector unitario.

- Cuando una variable sale de la base, su vector unitario se transforma en un vector de coeficientes que se calculan de acuerdo a dos sencillas reglas. Se aprecia que estos coeficientes calculados son las coordinadas de dichos vectores en función de la nueva base.

- Las variables que *estaban* en la base y *siguen* en la nueva base, conservan sus vectores unitarios.

- El paso de la solución a otra se efectúa en forma iterativa, es decir, introduciendo y sacando una variable por vez.

**Matriz del Simplex**

A la matriz de coeficientes original, se agregan los vectores correspondientes a los términos independientes (columna B)

A1 A2 A3 A4 A5 A6 B

1 3 1 0 0 0 15000

2 1 0 1 0 0 10000

2 2 0 0 1 0 12000

1 1 0 0 0 1 10000

Por otro lado, sobre cada vector columna se colocan los coeficientes de beneficio asociados a cada variable. Estos coeficientes se indican por Cj y corresponden a los valores del Funcional.

Entonces:

Cj 4 3 0 0 0 0

Genéricamente, una variable cualquiera se designa como Xj. Pero dentro de estas xj hay variables que pertenecen a la solución del problema; estas variables solución se designan como Xk. Es decir, el subíndice k individualiza a aquellas variables que son solución o base del sistema. En forma similar, se coloca a la izquierda de los Xk el vector columna de los coeficientes de beneficio, asociados a las variables que pertenecen a la solución.

Ck Xk A1 A2 A3 A4 A5 A6 B

0 x3 1 3 1 0 0 0 15000

0 x4 2 1 0 1 0 0 10000

0 x5 2 2 0 0 1 0 12000

0 x6 1 1 0 0 0 1 10000

Cj 4 3 0 0 0 0

El cuadro así obtenido, es el cuadro correspondiente al método Simples, que permitirá resolver el problema. Observe que este cuadro consta de los siguientes elementos:

1- Una matriz de coeficientes compuesta de dos submatrices: una, formada por los vectores columna de los coeficientes de las variables reales, y la otra, constituida por los vectores columna unitarios de las variables de holgura.

2- Un vector columna de términos independientes (B)

3- Un vector columna con las variables que pertenecen a la solucipon (Xk)

4- Un vector columna con los coeficientes de holgura de Beneficio o de costo asociados a las variables que pertenecen a la solución (Ck)

5- Un vector fila de coeficientes de Beneficios asociados a las variables (Cj)

**Obtención de la Primer Solución Básica Factible**

Analizando el cuadro, se verifica que a cada valor de Xk le corresponde horizontalmente un valor de B (recuérdese que x1 y x2 = 0)

Por lo tanto, para una fila determinada, como x1 y x2 valen cero, la variable de holgura correspondiente será igual al término independiente situado sobre su fila y a su derecha.

La fila Cj corresponde a los valores del Funcional Z.

Se obtiene así, mediante las columnas Xk y B, el siguiente conjunto de valores:

X3: 15000

X4: 10000

X5: 12000

X6: 10000

Ésta es la primera solución básica factible, igual a la obtención en el método algebraico, X1 y X2, igual a cero.

Falta ahora calcular el funcional Z.

Sabemos que Z es igual a la suma de los productos de los *valores que toman las variables,* por sus coeficientes asociados de beneficio.

Entonces: ,Z= Ck . Xk

Z= 0.x3 + 0.x4 + 0.x5 + 0.x6

Z= 0.15000 + 0.10000 + 0.12000 + 0.15000= 0

Este valor de Z se coloca en la intersección de la fila de Zj y la columna correspondiente a B. Se calculan luego los valores de Zj correspondientes a cada una de las columnas de la matriz.

Ck Xk A1 A2 A3 A4 A5 A6 B

0 x3 1 3 1 0 0 0 15000

0 x4 2 1 0 1 0 0 10000

0 x5 2 2 0 0 1 0 12000

0 x6 1 1 0 0 0 1 10000

Cj 4 3 0 0 0 0

Zj 0 0 0 0 0 0

Zj – Cj -4 -3 0 0 0 0

Se verifica que se ha agregado una fila zj-cj, osea, para cada columna, la diferencia entre el valor Zj del funcional para la misma y su beneficio Cj correspondiente.

Se ha obtenido así la primera solución básica factible, que coincide con el valor hallado para el funcional y las variables reales, según los métodos gráfico y algebraico. Al igual que este último, el próximo paso es determinar si existe una mejor solución.

**Pasos para la Resolución del Método Simplex**

1. Planteo del sistema de inecuaciones.
2. Conversión de las inecuaciones en igualdades.
3. Confección de la tabla original del Simplex que permite obtener la primera solución básica factible.
4. Ver si la solución puede mejorase.

Evidentemente, el problema admite una mejor solución, dado que hay dos valores negativos en la fila zj-cj (recuérdese que éste es el criterio que permite conocer si el funcional puede mejorase o no)

1. Determinar la variable que entra: ingresa X1 correspondiente A1, ya que éste es el que tiene mayor valor negativo de zj – cj (indicar con una flecha tal circunstancia)
2. Determinar la variable que sale (cálculo de 0)

Hallando los 0 con respecto a A1, se aprecia que el menor cociente corresponde a x4. Por lo tanto, sale x4, siendo A21=2 el elemento pivote. Se indica con una flecha dicha salida y se rodea con un círculo.

1. Se confecciona el cuadro colocando x1 en lugar de x4, y el ck correspondiente.
2. Se colocan los vectores unitarios (A1-A3-A6)
3. Se calculan los nuevos coeficientes de la fila correspondiente a la variable que salió (o fila correspondiente al pivote)
4. Se calculan los nuevos coeficientes del resto de las filas.
   1. Se calcula Zj.
   2. Se calcula el zj-cj para cada columna. A partir de este momento, se repite el procedimiento desde el paso cuarto.

Es interesante analizar gráficamente el significado de tener que elegir el menor de los 0i cuando se desea determinar la variable que debe salir de la solución.

En efecto, en el cuadro que antecede se debe elegir, para entrar, la columna A1 y para salir la fila de los X4, ya que es la que presenta el mínimo valor de los 0i.